

001
110
010
001



Épreuve Mondiale 2026

Prova definitiva



Gabarito
Júnior e Sênior



Nome

Data

Série

Turma

UF

Data

Mostre que você é fera em matemática.

Boa prova!



Temperamental
(Língua estrangeira) (7 pontos)

Às quintas e sextas-feiras o menino diz a verdade.

Nesses dois dias consecutivos, sua resposta à pergunta sobre seu nome deve ser a mesma.

No entanto, nas respostas apresentadas no enunciado não há duas respostas consecutivas idênticas. Portanto, o menino dá a última resposta “Elio” em uma quinta-feira ou a primeira resposta “Sacha” em uma sexta-feira. Vamos analisar os casos considerando a tabela a seguir, em que o X representa o 7º dia.

SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA	SÁBADO	DOMINGO
SACHA	ELIO	LUCAS	ELIO	X	SACHA	ELIO
ELIO	LUCAS	ELIO	X	SACHA	ELIO	SACHA

O primeiro caso (resposta verdadeira “Elio” na quinta-feira) pode ser descartado, pois nesse caso o menino também daria a resposta “Elio” na terça-feira, dois dias antes da quinta-feira.

Mas às terças ele mente, o que leva a uma contradição.

Logo, o menino dá a primeira resposta “Sacha” em uma sexta-feira e, assim, diz a verdade, pois na terça em que ele mente ele diz Lucas que é um nome diferente.

Assim, o menino se chama Sacha.

Sem o nove (5 pontos)

Se utilizarmos cada um dos quatro algarismos 1, 3, 5 e 7 exatamente uma vez, podemos formar $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ números de quatro algarismos.

Em cada posição (milhar, centena, dezena, unidade), cada algarismo aparece $24 \div 4 = 6$ vezes.

Para cada número de quatro algarismos $abcd$:

$$abcd = a \times 1000 + b \times 100 + c \times 10 + d \times 1$$

Ao somar os 24 números, podemos somar todos os algarismos das unidades de milhar e multiplicá-los por 1000, somar todos os algarismos das centenas e multiplicá-los por 100, somar todos os algarismos das dezenas e multiplicá-los por 10 e somar todos os algarismos das unidades.

Como cada algarismo aparece 6 vezes em cada posição, a soma dos algarismos das unidades de milhar é:

$$6 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 + 6 \cdot 7 = 6 \cdot 16 = 96$$

E como cada algarismo aparece 6 vezes em cada posição, a soma dos dígitos das centenas também é 96, assim como a soma dos dígitos das dezenas e a soma dos dígitos das unidades.

Portanto, a soma dos 24 números é:

$$96 \cdot 1000 + 96 \cdot 100 + 96 \cdot 10 + 96 \cdot 1 = 96 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 96 \cdot 1111 = 106.656$$

A soma de todos os números de quatro algarismos que podem ser formados usando cada um dos algarismos 1, 3, 5 e 7 exatamente uma vez é 106.656.

Pizza fina retangular (7 pontos)



As cinco fatias devem totalizar a área da pizza, que é $45 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 1350 \text{ cm}^2$.

Logo, a área de cada parte (fatia) é $1350 \text{ cm}^2 \div 5 = 270 \text{ cm}^2$.

No triângulo DAO, seja h_1 a altura relativa ao lado DA (a partir do ponto O). Temos:

$$\frac{30 \times h_1}{2} = 270 \Rightarrow h_1 = \frac{270 \times 2}{30} = 18$$

Portanto $h_1 = 18 \text{ cm}$.

No triângulo OFC, a altura h_2 relativa ao lado FC (a partir de O) é então: $h_2 = 45 - 18 = 27 \text{ cm}$.

Temos então:

$$\frac{CF \times h_2}{2} = \frac{CF \times 27}{2} = 270 \Rightarrow CF = \frac{270 \times 2}{27} = 20$$

Portanto $CF = 20 \text{ cm}$.

No triângulo DOC, seja h_3 a altura relativa ao lado DC (a partir de O). Temos:

$$\frac{45 \times h_3}{2} = 270 \Rightarrow h_3 = \frac{270 \times 2}{45} = 12$$

Portanto $h_3 = 12 \text{ cm}$.

No triângulo AEO, a altura h_4 relativa ao lado AE (a partir de O) é então: $h_4 = 30 - 12 = 18 \text{ cm}$.

Temos então:

$$\frac{AE \times h_4}{2} = \frac{AE \times 18}{2} = 270 \Rightarrow AE = \frac{270 \times 2}{18} = 30$$

Portanto $AE = 30 \text{ cm}$.

Assim, o comprimento do segmento $\overline{AE}$ é 30 cm e o comprimento do segmento $\overline{CF}$ é 20 cm.

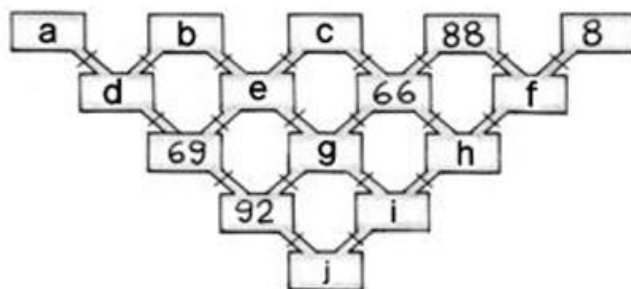


Água escoando (5 pontos)

Vamos denotar os reservatórios vazios como na figura ao lado:

Percebemos que o reservatório **f** receberá 8 e a metade de 88, portanto **f** = $88 \div 2 + 8 = 52$.

O reservatório **h** receberá 52 mais a metade de 66, portanto **h** = $66 \div 2 + 52 = 85$.



O reservatório que está com 66 recebeu a metade de 88 (44) no canto superior direito, e a metade de c ($\frac{c}{2}$) no canto superior esquerdo

$$66 = \frac{c}{2} + 44 \Rightarrow \frac{c}{2} = 22 \Rightarrow c = 44$$

Logo, **c** = 44.

O reservatório que está com 92 recebeu a metade de **g** mais 69.

$$92 = \frac{g}{2} + 69 \Rightarrow \frac{g}{2} = 23 \Rightarrow g = 46$$

Logo, **g** = 46.

O reservatório que está com $g = 46$ recebeu a metade de **e** e a metade de 66.

$$46 = \frac{e}{2} + 33 \Rightarrow \frac{e}{2} = 13 \Rightarrow e = 26$$

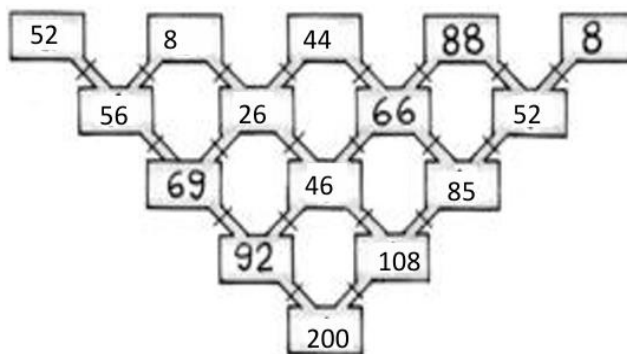
Assim, **e** = 26

Continuando da mesma forma, encontra-se: **b** = 8, **d** = 56, **a** = 52, **i** = 108 e **j** = 200.

Assim, temos a solução:

Observação:

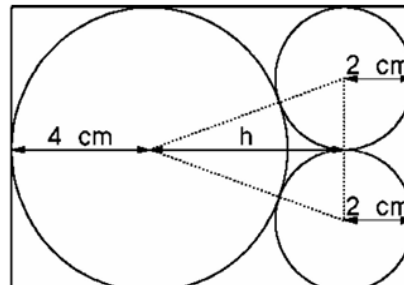
Também é possível, encontrar os valores de linha completa e, verificar que a quantidade total de água é 200.



Olhando dentro dos tubos (7 pontos)

A altura do retângulo que representa a vista frontal é de 8 cm (soma dos diâmetros dos dois tubos de 4 cm).

Para determinar a largura, precisamos construir o triângulo isósceles cujos vértices são os centros dos tubos.

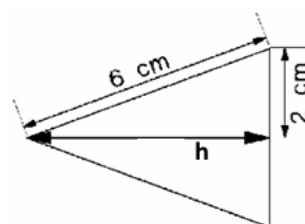


Perceba que a medida dos lados congruentes do triângulo isósceles é 6 cm (a soma dos raios: 4 cm + 2 cm).

Assim, pelo teorema de Pitágoras temos que a altura h , será:

$$6^2 = h^2 + 2^2$$

$$h^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow h = \sqrt{6^2 - 2^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$



Perceba que a largura do retângulo é: $l = 4 + h + 2$. Assim,

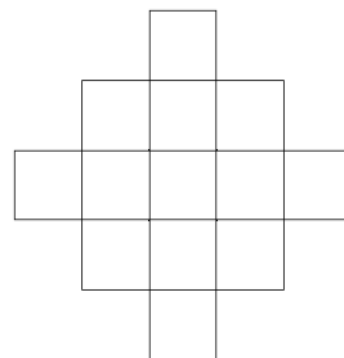
$$l = 4 + 4\sqrt{2} + 2 = 6 + 4\sqrt{2} \approx 11,65$$

Assim, a largura da caixa é: 11,65 cm.

Portanto, as dimensões da caixa são: 8 cm de altura, 10 cm de comprimento e 11,65 cm de largura.

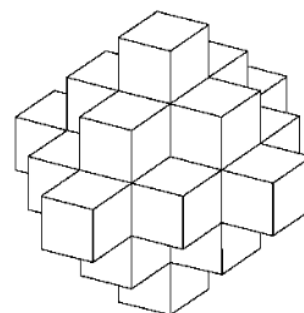
Sólido formado por cubos coloridos (5 pontos)

A vista frontal do sólido resultante é apresentada na figura ao lado.



Perceba que no sólido obtido só aparecerá os cubos vermelhos e ele possuirá 5 camadas:

- A 1ª e a 5ª camadas são compostas, cada uma, por um cubo vermelho, portanto, 2 cubos vermelhos;
- A 2ª e a 4ª camadas são compostas, cada uma, por 4 cubos vermelhos cada (e um cubo azul), portanto, mais 8 cubos vermelhos;
- A 3ª camada é composta por 8 cubos vermelhos (além de 4 cubos azuis e 1 cubo amarelo), portanto, mais 8 cubos vermelhos.



Foram colados ao todo $2 + 8 + 8 = 18$ cubos vermelhos.

A vista frontal do sólido mostra 13 faces vermelhas.

O sólido tem um total de $6 \times 13 = 78$ faces, todas vermelhas.

Foram colados 18 cubos vermelhos.

O novo sólido possui ao todo 78 faces.



Roupa de natação (7 pontos)

No momento em que o pai sai para encontrar o filho (30 minutos após sua partida), Patrick já terá percorrido 6 km (a uma velocidade constante de 12 km/h).

$$0,5 \times 12 \text{ km} = 6 \text{ km}$$

Desse momento até o encontro, Patrick e seu pai terão percorrido a mesma distância.

Seja d a distância em quilômetros que Patrick deve percorrer desde o momento em que seu pai partiu até o momento em que se encontram. O pai terá percorrido: $6 + d$ km. Obtemos a equação (igualdade de tempos):

$$\frac{d}{12} = \frac{6 + d}{60}$$

Ao colocá-los sobre um denominador comum, obtemos:

$$5d = 6 + d$$

$$4d = 6 \Rightarrow d = 1,5$$

Patrick terá que caminhar mais 1,5 km para chegar até o encontro com o pai.

O tempo T que levará para caminhar esses 1,5 km será:

$$T = \frac{\text{distância}}{\text{velocidade}} = \frac{1,5}{12} h = \frac{1}{8} h = \frac{60}{8} \text{ min} = 7,5 \text{ min}$$

O pai levará 7 minutos e 30 segundos para alcançar Patrick.

Números misteriosos (5 pontos)

Existem apenas quatro posições, e o algarismo 4 não pode ser colocado em nenhuma posição, então apenas os algarismos 0, 1, 2 e 3 podem ser usados.

No entanto, o algarismo 0 não pode estar na primeira posição, pois isso indicaria que não há 0, o que é impossível.

Vamos analisar os diferentes algarismos a serem colocados:

- Se $a = 3$, então $b = c = d = 0$, mas d não pode ser igual a 0 porque $a = 3$. Isso é uma contradição, logo a não pode ser igual a 3. Pelos mesmos motivos, nem b , nem c , nem d podem ser iguais a 3.
- Se $a = 2$, haverá dois algarismos zeros, mas não na terceira posição porque o algarismo 2 já está na posição a . Isso requer $c = 2$, e obtemos uma primeira solução: 2020.
- Se $b = 2$, devemos ter dois algarismos 1. Podemos colocá-los nas posições de a e c , o que implica que há um 0 em alguma posição e um 2 que de fato está lá. O algarismo 0 está, portanto, na posição d , obtendo a segunda solução: 1210.
- Se $c = 2$, já encontramos uma solução anteriormente. O outro 2 não pode estar em b porque isso exigiria $a = 1$ e $d = 1$, o que é impossível. Também não pode estar em d porque, nesse caso, a teria que ser igual a 3, o que também é impossível.
- Se $d = 2$, então dois dos três algarismos a , b ou c são iguais a 3, o que leva a uma impossibilidade.
- Se $a = 1$, reencontramos a segunda solução.
- Se $b = 1$;
 $a = 0$ é impossível na primeira posição (veja acima);
 $a = 1$ é impossível, pois só há um algarismo 1;
 $a = 2$ impossível, pois implicaria um algarismo 0 na posição 3 que indicaria a quantidade de 2;
 $a = 3$ impossível, pois implicaria três zeros para apenas duas posições restantes.
- Se $c = 1$, reencontramos a segunda solução.
- Se $d = 1$, isso implicaria a presença de um algarismo 3 em alguma posição, o que já foi descartado, como visto anteriormente.

Os únicos números misteriosos possíveis são 2020 e 1210.



Confeitaria (7 pontos)

Para que os vértices A, E, D e C estejam na semicircunferência, o triângulo retângulo OAE deve ser isósceles em O .

Portanto, o triângulo OIA é um triângulo retângulo isósceles em I .

I é o ponto médio de $\overline{AE}$.

Logo, $AI = 10,5 \text{ cm}$.

Então, temos:

$$OI = AI = 10,5 \text{ cm}$$

$$OJ = 10,5 + 11 = 21,5 \text{ cm}$$

O triângulo OJC é um triângulo retângulo em J ,

de acordo com o Teorema de Pitágoras:

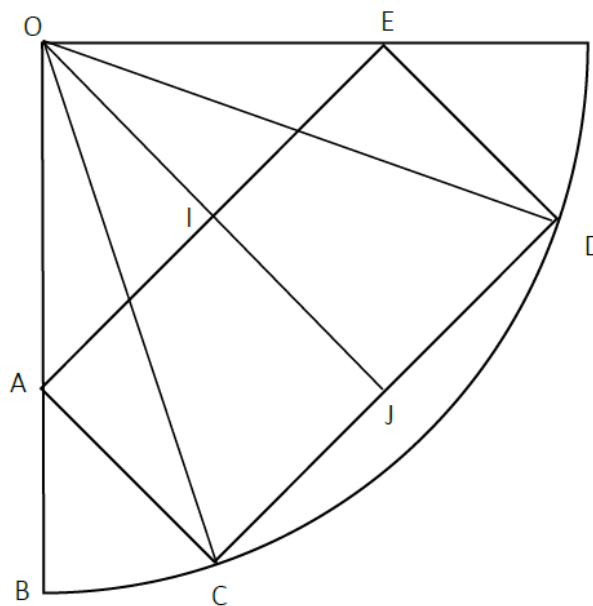
$$OC^2 = OJ^2 + CJ^2$$

$$OC^2 = 21,5^2 + 10,5^2$$

$$OC = \sqrt{572,5} \cong 23,93$$

Perceba que $OB = OC$ que é o raio da prateleira.

Assim, o raio da prateleira é de aproximadamente 23,93 cm.



A dança do quadrado (10 pontos)

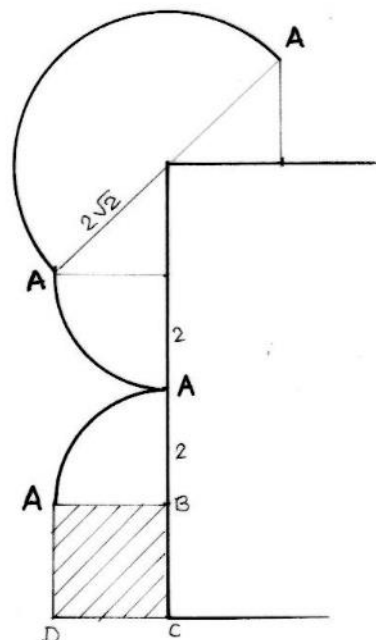
Comprimento total do percurso do vértice A:

Perceba que na figura ao lado, o vértice A percorre duas vezes $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio 2.

E percorre a semicircunferência de raio $2\sqrt{2}$.

Como o percurso desenhado ao lado se repete 4 vezes temos que o comprimento total da trajetória a partir do ponto A:

$$\begin{aligned} & 4 \times \left(2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} \right) = \\ & = 4 \times (2\pi + 2\pi \times \sqrt{2}) = 4\pi \times (2 + 2\sqrt{2}) \approx 60,7 \end{aligned}$$



Comprimento total do percurso do vértice B:

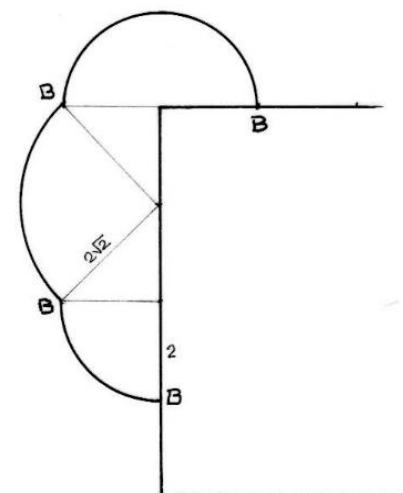
Perceba que na figura ao lado, o vértice B percorre uma vez $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio 2.

E percorre uma vez $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

E percorrer uma vez a semicircunferência de raio 2.

Como o percurso desenhado ao lado se repete 4 vezes temos que o comprimento total da trajetória a partir do ponto B:

$$\begin{aligned} & 4 \times \left(\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 \right) = \\ & = 4 \times \left(\frac{3}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} \right) \\ & = 4 \times (3\pi + \pi \times \sqrt{2}) = 4\pi \times (3 + \sqrt{2}) \approx 55,5 \end{aligned}$$



Comprimento total do percurso do vértice C:

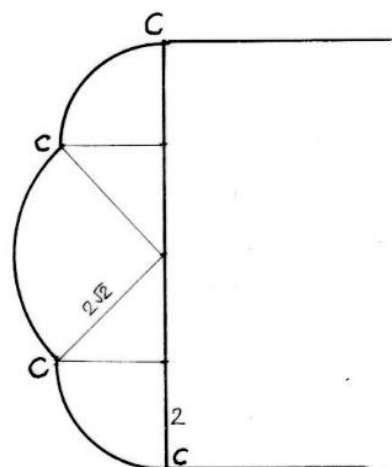
Perceba que na figura ao lado, o vértice C percorre duas vezes $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio 2.

E percorre uma vez $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

Como o percurso desenhado ao lado se repete 4 vezes temos que o comprimento total da trajetória a partir do ponto C:

$$4 \times \left(2 \times \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} \right) =$$

$$= 4 \times (2\pi + \pi \times \sqrt{2}) = 4\pi \times (2 + \sqrt{2}) \approx 42,9$$



Comprimento total do percurso do vértice D:

Perceba que na figura ao lado, o vértice D percorre uma vez $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio 2.

E percorre uma vez $\frac{1}{4}$ de uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

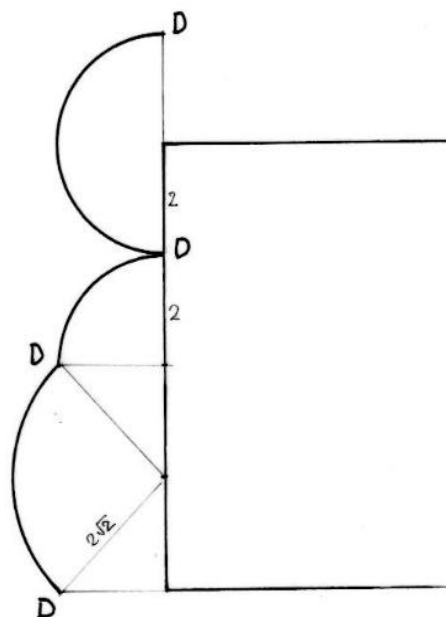
E percorrer uma vez a semicircunferência de raio 2.

Como o percurso desenhado ao lado se repete 4 vezes temos que o comprimento total da trajetória a partir do ponto D:

$$4 \times \left(\frac{1}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} + \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 \right) =$$

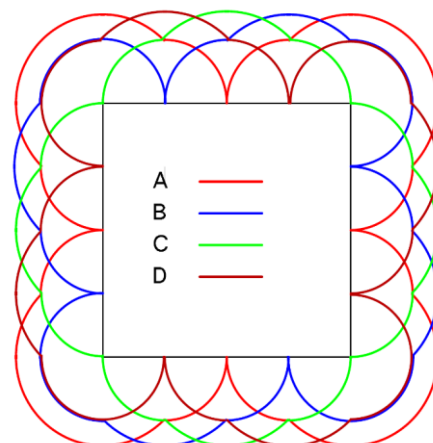
$$= 4 \times \left(\frac{3}{4} \times 2\pi \times 2 + \frac{1}{4} \times 2\pi \times 2\sqrt{2} \right)$$

$$= 4 \times (3\pi + \pi \times \sqrt{2}) = 4\pi \times (3 + \sqrt{2}) \approx 55,5$$



Assim, o vértice C percorreu a menor distância, que é aproximadamente 42,9 cm.

Observação: A figura ao lado apresenta o percurso total de cada vértice.



Apenas para o Ensino Médio
Quem está certo? (5 pontos)

Para justificar as afirmações, é necessário listar as possibilidades de obter esses três resultados.

Podemos observar nas tabelas a seguir, que existem quatro casos possíveis para 5 e 6, em comparação com dois casos para 9, então ambos estão certos.

SOMA 5	
Dado de 6 faces	Dado de 4 faces
1	4
2	3
3	2
4	1

SOMA 6	
Dado de 6 faces	Dado de 4 faces
2	4
3	3
4	2
5	1

SOMA 9	
Dado de 6 faces	Dado de 4 faces
5	4
6	3

Michael e Stephanie estão corretos!



Apenas para o Ensino Médio Kaprekar (7 pontos)

Vamos analisar os exemplos a seguir:

3 ; 4 ; 5	$543 - 345 = 198$	7 ; 8 ; 1	$871 - 178 = 693$
	$981 - 189 = 792$		$963 - 369 = 594$
	$972 - 279 = 693$		$954 - 459 = 495$
	$963 - 369 = 594$		
	$954 - 459 = 495$		

Após cinco aplicações do algoritmo, chegamos a 495 nos dois casos.

Assim, Kaprekar anuncia 495.

Sejam a , b e c três dígitos diferentes, com $a < b < c$.

O maior número formado com esses três dígitos é: $100c + 10b + a$

O menor número formado com esses três dígitos é: $100a + 10b + c$.

A diferença D entre esses dois números é: $D = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99(c - a)$.

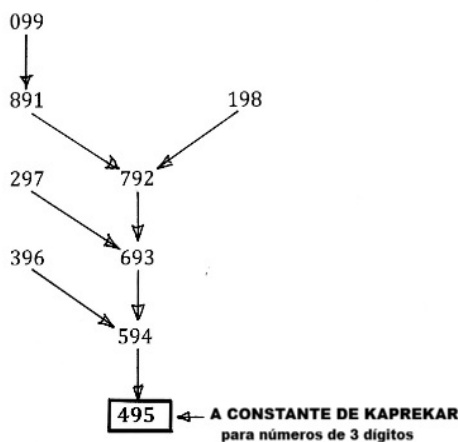
Essa diferença D é um múltiplo de 99.

Basta considerarmos os múltiplos de 99: 099; 198; 297; 396; 495; 594; 693; 792; 891.

O algoritmo resulta em 495 para cada um desses números.

CONSTANTE DE KAPREKAR para números de três dígitos

Todos eles são múltiplos de 99



Apenas para o Ensino Médio
Gota de água (10 pontos)

A área sombreada consiste no círculo de raio $\overline{BD}$ e na parte delimitada por três arcos de um círculo, arco CD de raio 9, arco CE e ED de raio 3.

O primeiro círculo, com centro B e raio 3, tem uma área de $\pi \times 3^2 = 9\pi$.

A segunda parte é calculada subtraindo-se a área do setor OCD da área do triângulo OAB e das áreas dos dois setores ACE e BED, que correspondem a um terço de um círculo.

$$\text{Área do setor OCD: } \frac{\pi \times 9^2}{6} = \frac{27\pi}{2}$$

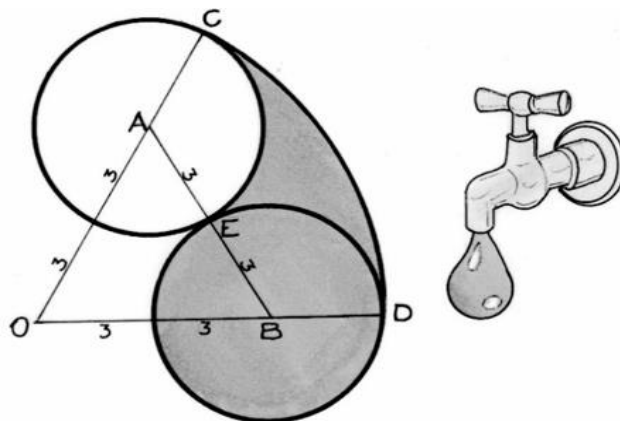
$$\text{Área do triângulo OAB: } \frac{6 \times \sqrt{6^2 - 3^2}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$\text{Área dos setores ACE e BED: } \frac{2 \times \pi \times 3^2}{3} = 6\pi$$

$$\text{Área da segunda parte: } \frac{27\pi}{2} - 9\sqrt{3} - 6\pi = \frac{15\pi}{2} - 9\sqrt{3}$$

$$\text{A área total da figura: } 9\pi + \frac{15\pi}{2} - 9\sqrt{3} = \frac{33\pi}{2} - 9\sqrt{3} \approx 36,248$$

A área da gota (região sombreada) é 36,248 cm².



Apenas para o Ensino Médio
Soma e produto! (10 pontos)

Recomenda-se fortemente a utilização de uma planilha eletrônica.

a	a + 1	S (soma)	P (produto)	(S x P)
1	2	3	2	6
2	3	5	6	30
3	4	7	12	84
4	5	9	20	180
5	6	11	30	330
6	7	13	42	546
7	8	15	56	840
8	9	17	72	1224
9	10	19	90	1710
10	11	21	110	2310
11	12	23	132	3036
12	13	25	156	3900
13	14	27	182	4914
14	15	29	210	6090
15	16	31	240	7440
16	17	33	272	8976
17	18	35	306	10710
18	19	37	342	12654
19	20	39	380	14820
20	21	41	420	17220
21	22	43	462	19866
22	23	45	506	22770
23	24	47	552	25944
24	25	49	600	29400
25	26	51	650	33150
26	27	53	702	37206
27	28	55	756	41580
28	29	57	812	46284
29	30	59	870	51330
30	31	61	930	56730
31	32	63	992	62496
32	33	65	1056	68640
33	34	67	1122	75174
34	35	69	1190	82110
35	36	71	1260	89460
36	37	73	1332	97236
37	38	75	1406	105450
38	39	77	1482	114114
39	40	79	1560	123240
40	41	81	1640	132840

38 e 39 são soluções.

Outra solução usando fatoração em números primos:
(esta demonstração não era exigida.)

114114 pode ser decomposto da seguinte forma:

$$114114 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19$$

O enunciado pode ser escrito como:

$$114114 = a \times (a + 1) \times (2a + 1)$$

Portanto, procuramos dois números consecutivos que apareçam em uma fatoração de 114114.

Existem três pares possíveis de números consecutivos:

$$114114 = 2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 19$$

$$114114 = 13 \times 14 \times 11 \times 19 \times 3$$

$$114114 = 38 \times 39 \times 11 \times 7$$

$$(11 \times 7 = 38 + 39)$$

Dentre essas, apenas a última solução é válida.