Olimpíada Internacional

Mathématiques sans frontières 2024

Épreuve Mondiale

Prova definitiva

Gabarito

Júnior - Sênior

Nome da Escola

Série:

Turma:

UF:

Cidade:

Rede POC

International Education

Épreuve Mondiale

Gabarito

Questão 1

Like **(Língua estrangeira) (7 pontos)**

Responda no caderno de resposta em um dos idiomas.

Seja x o número de vezes que Jacquot ficou feliz e satisfeito durante as últimas quatorze refeições.

Temos, portanto, 14 – x, o número de vezes que Jacquot não ficou satisfeito com o serviço.

Como depois de 14 semanas o garçom não ganhou nada, nem perdeu nada, podemos resolver a seguinte equação:

Portanto, Jacquot ficou feliz e satisfeito, 8 vezes durante as últimas quatorze refeições.

Questão 2

A idade do professor de matemática (5 pontos)

Seja a idade do professor. Devemos resolver a equação:

Giovanni, nasceu em 1962 e completou 62 anos em 2024.

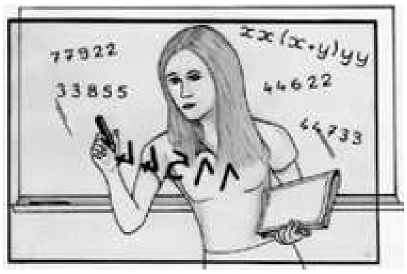
Se Giovanni nasceu em 1962, podemos assumir que ele não era avô até aos 38 anos e, portanto, seu neto nasceu depois de 2000. Seja a idade do neto de Giovanni.

Devemos resolver a equação:

Então o neto de Giovanni, nasceu em 2012, completa 12 anos em 2024.

Questão 3

111 (7 pontos)



Dois outros números que atendem às condições estabelecidas são 11988 e 22 977.

11988 : 111 = 108   22977 : 111 = 207

Em ambas as divisões notamos que o primeiro dígito do quociente é o primeiro do dividendo, o segundo é e o terceiro é o último do dividendo.

Podemos, portanto, levantar a seguinte hipótese:

O resultado da divisão de um número da forma por é um número do tipo , com inteiros x e y e cuja soma é menor que 10.

Para provar a propriedade podemos proceder da seguinte forma:

Na forma polinomial temos:

$$xx(x+y)yy = x\cdot 10^4 + x\cdot 10^3 + (x+y)\cdot 10^2 + y\cdot 10^1 + y$$

$$x\cdot 10^4 + x\cdot 10^3 + x\cdot 10^2 + y\cdot 10^2 + y\cdot 10^1 + y = \left(10^2+10+1\right)\cdot\left(x\cdot 10^2 + y\right)$$

$$xx(x+y)yy = \left(10^2+10+1\right)\cdot\left(x\cdot 10^2 + y\right)$$

Como $111 = 10^2 + 10 + 1$, o número $xx(x+y)yy$ pode ser escrito como o produto de dois fatores, dos quais um é 111. Logo,

$$\left(10^2+10+1\right)\cdot\left(x\cdot 10^2+y\right) : \left(10^2+10+1\right) = x\cdot 10^2 + y$$

$$xx(x+y)yy : 111 = x0y$$

Resumindo, o número escrito como xx(x+y)yy é 11.000 x + 100(x+y) +11y, que também pode ser expresso como 11100x + 111y ou mesmo 111(100x+y). O quociente da divisão desse número por 111 é (100x+y), ou seja, x0y.

Questão 4

Rotas (5 pontos)

A descomposição de 2024 e 2025 em fatores primos são:

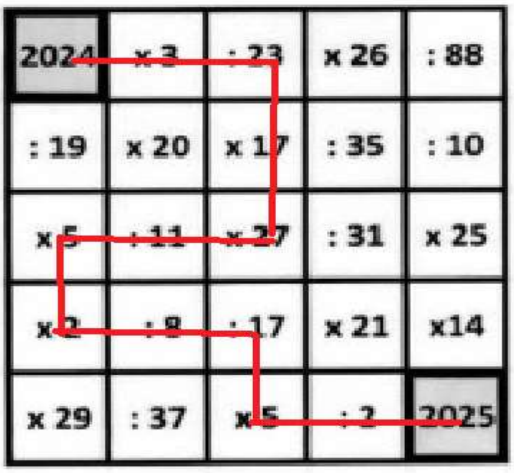
e

Percebemos que 2024 e 2025 são primos entre si. Logo, para passar, portanto, de um a outro apenas com multiplicações e divisões é necessário dividir por todos os fatores do primeiro e multiplicar por todos os fatores do segundo. Então para ir de 2024 a 2025 será preciso dividir três vezes por 2, por 11 e por 23, e multiplicar quatro vezes por 3 e duas vezes por 5. O que facilita descobrir o caminho. Outros números, múltiplos de 7, 13, etc. devem ser evitados. Se você multiplicar por um ou mais outros números da tabela, deverá ser capaz de dividir pelo produto deles (em uma ou mais etapas).

Você pode, portanto, começar excluindo da tabela os números que não possuem esta característica:

2024	x3	:23	x26	:88
:19	x20	x17	:35	:10
x5	:11	x27	:31	x25
x2	:8	:17	x21	x14
x29	:37	x5	:2	2025

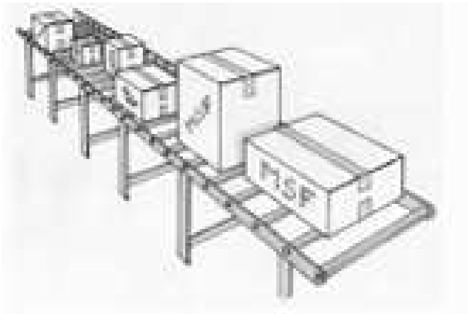
2024	x3	:23	x26	:88
:19	x20	x17	:35	:10
x5	:11	x27	:31	x25
x2	:8	:17	x21	x14
x29	:37	x5	:2	2025



2024	x 3	: 23	x 26	: 88
: 19	x 20	x 17	: 35	: 10
x 5	: 11	x 27	: 31	x 25
x 2	: 8	: 17	x 21	x14
x 29	: 37	x 5	: 2	2025

Questão 5

Encomendas on-line (7 pontos)



Considere as embalagens de nº 1 a nº 6 com respectivas massas **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, **f**.

Como a massa total de cada triplo é de 8 kg, obtêm-se as relações:

a+b+c=b+c+d

b+c+d=c+d+e

c+d+e=d+e+f

a partir do qual temos **a=d**, **b=e** e **c=f**.

Repetindo o raciocínio é possível concluir que quaisquer dois triplos consecutivos serão sempre formados por embalagens de massa **a**, **b**, **c**. Haverá, portanto, 13 triplos consecutivos **a**, **b**, **c** e o 40º embalagem terá massa **a**. Em particular:

Número da embalagem	19	20	21
Massa	a	b	c

A embalagem nº 20 e a embalagem nº 21 têm a mesma massa, portanto b=c e portanto existem apenas duas possibilidades **b** = 2 kg e **a** = 4 kg ou **b** = 3 kg e **a** = 2 kg.

Como a massa total é de 106 kg, a única possibilidade é **a** = 2 kg e **b** = 3 kg, portanto as embalagens de número 20 e 21 têm massa de 3 kg cada.

Outra solução:

Agrupando as embalagens de três em três a partir da primeira, obtemos 13 grupos de 8 kg e resta a última, a 40º embalagem. A massa da última embalagem é portanto: 106 - 13 x 8 = 2kg.

O mesmo raciocínio sobre as primeiras 37 embalagens permite calcular a massa da 37º embalagem, depois da 34º... até a 19º. Portanto, a embalagem 19 tem massa de 2kg.

Como as embalagens 20 e 21 têm a mesma massa, sendo que a massa dos pacotes 19, 20 e 21 é igual a 8 kg, temos, portanto que as embalagens 20 e 21 têm massa igual a (8 - 2)/2 = 3 kg.

Questão 6

Cuidado com o desperdício! (5 pontos)

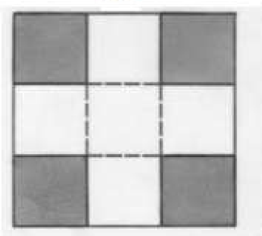
Chamando de a medida do lado da folha quadrada, assim a medida do lado da primeira caixa (caixa A) é enquanto a da segunda caixa (caixa B) é que corresponde a uma caixa maior. Vamos calcular o disperdício de cada modelo de caixa.

A caixa A pode ser dividida em 9 quadrados congruentes de área . Logo, o disperdício da caixa A é dada por .

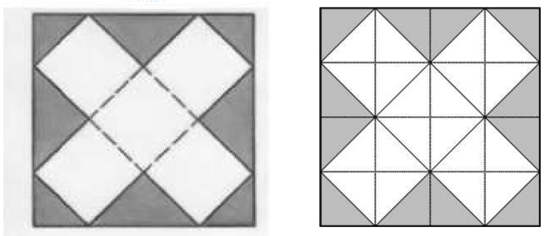
A caixa B pode ser dividida em 32 triângulos equilateros de área . Logo, o disperdício da caixa B é dada por .

Como , pois , a caixa de o modelo B é a que produz menos disperdício de papelão.

A



B

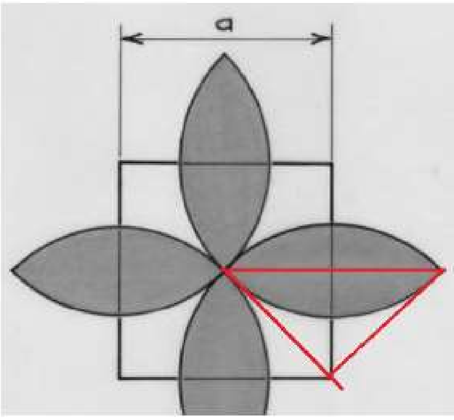


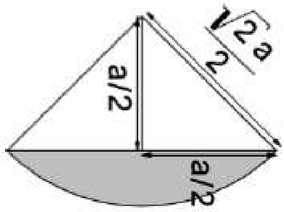
Questão 7

Componha uma flor (7 pontos)

A flor é composta por quatro pétalas iguais;

Cada uma é duas vezes um setor circular de um círculo de raio , cuja distância até o centro do quadrado é .





A área do setor será igual a da área do círculo menos a área do triângulo, ou seja,

A área da parte colorida é igual a 8 vezes a área do setor circular, ou seja,

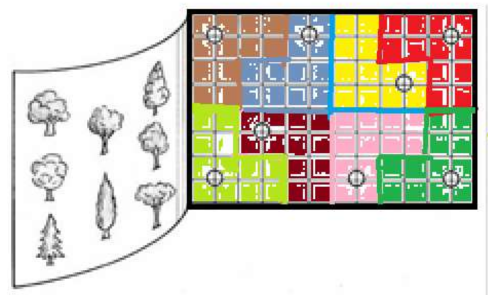
.

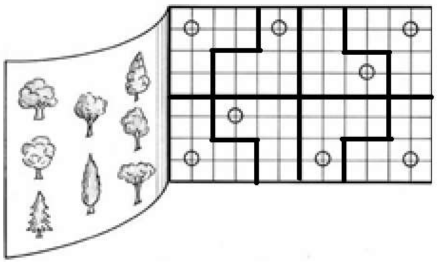
Questão 8

zada (5 pontos)

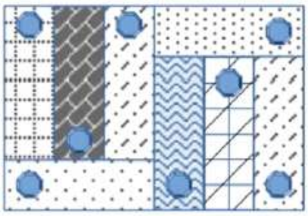
Como o terreno é composto de 8x12 quadradinhos, cada lote tem uma área de 12 quadradinhos. Existem muitas formas possíveis de subdividir o terreno em 8 lotes, mesmo sem seguir o padrão da malha quadriculada.

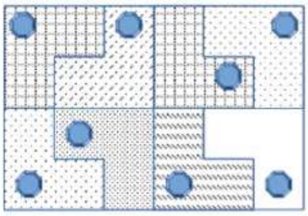
Segue abaixo uma possibilidade, colorida ou preto e branco.

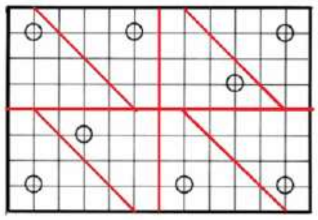




E segue mais três possibilidades.

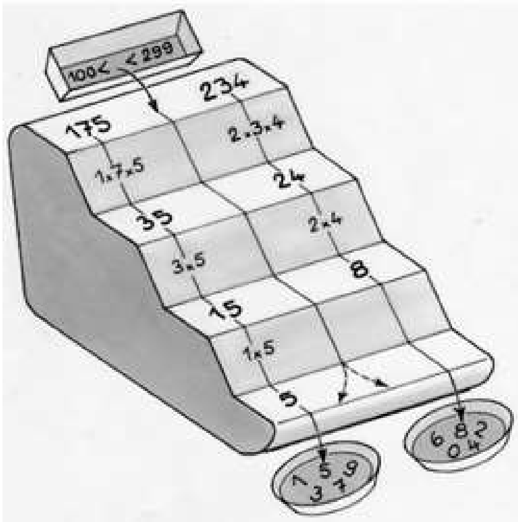






Questão 9

Algoritmo (7 pontos)



Para obter um resultado ímpar, o número inicial deve ter todos os três dígitos ímpares. Três dígitos ímpares são necessários, mas não é suficientes. É necessário também que a escrita decimal dos produtos sucessivos não contenha nenhum dígito ímpar.

Dado que o número não deve conter zero, não deve conter algarismo par, apenas são considerados os números entre 100 e 299 compostos exclusivamente por algarismos ímpares, portanto todos os números de 200 a 299, inclusive os extremos, são excluídos dos números de teste, ou seja, então, basta olhar para os números de 100 a 199 que satisfaça as condições.

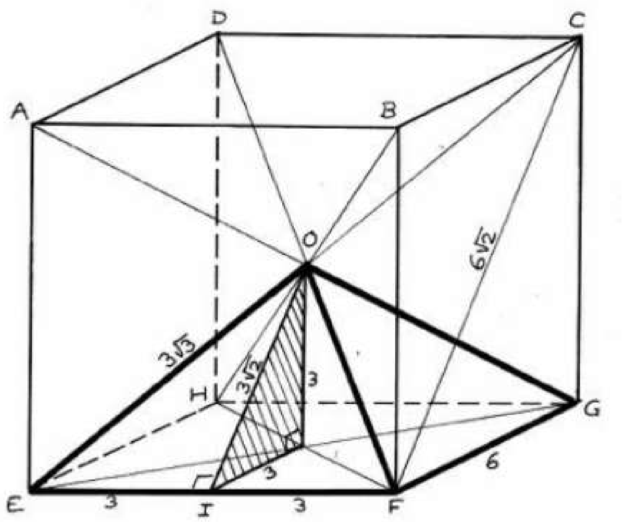
Primeira lista (apenas n estranho)	Segunda lista após a primeira eliminação de números com dígitos permutados	Terceira lista após as próximas duas etapas	Resultado
111, 113, 115, 117, 119	111, 113, 115, 117, 119	111, 113, 115, 117, 119	1, 3, 5, 7, 9
131, 133, 135, 137, 139	133, 135, 137, 139	133, 135	5, 9
151, 153, 155, 157, 159	155, 157,159	157	5
171, 173, 175, 177, 179	177, 179		
191, 193, 195, 197, 199	199		

Portanto os números entre 100 e 299 que dão resultado ímpar, aplicando o algoritmo indicado, são:

111
113, 131
115, 151
117, 171
119, 191
133
135, 153
157, 175

Questão 10

Corte o cubo (10 pontos)



O sólido obtido é uma pirâmide de base quadrada e altura igual à metade da aresta da base.

Logo o volume da pirâmide é dado por :

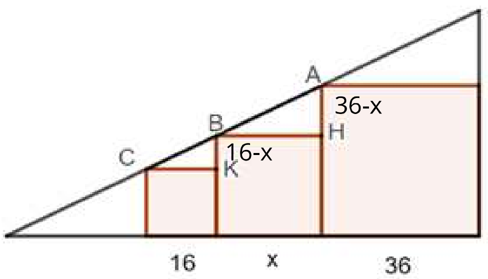
Portanto, o volume da pirâmide é igual a do volume do cubo.

Dada a simetria central do cubo, podem ser obtidas 6 pirâmides deste tipo, todas com vértice em O e base em uma das faces do cubo.

Questão 11

Apenas para o Ensino Médio
Pista de Skate (5 pontos)

Sejam, A, B e C os vértices dos quadrados coincidentes com três pontos da rampa.



Como os triângulos BCK e ABH são semelhantes, pois os ângulos BHA e CKB são retos e os ângulos BAH e CBK são congruentes, então temos :

Questão 12

Apenas para o Ensino Médio
Exercício preto e branco (7 pontos)

Divisível por	Numero das fichas									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
3	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●
4	○	●	●	○	○	○	○	○	●	●
5	○	●	●	○	●	○	○	○	●	○
6	○	●	●	○	●	●	○	○	●	○
7	○	●	●	○	●	●	●	○	●	○
8	○	●	●	○	●	●	●	●	●	○
9	○	●	●	○	●	●	●	●	○	○
10	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●

Após 10 manipulações, as fichas 1, 4 e 9 permanecem brancas, ou seja, os quadrados das potências de 1, 2 e 3. Continuamos com a solicitação de 100 fichas e após um certo número de manipulações, aumentando gradativamente as fichas, podem ser feitas as seguintes observações:

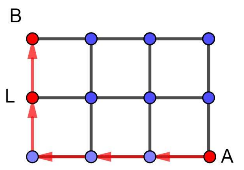
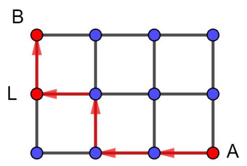
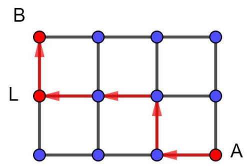
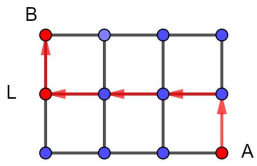
- Vemos que o número de vezes que uma ficha muda de cor é igual ao seu número de divisores.
- Inicialmente a face visível é preta, então para que ela fique branca após um certo número de manipulações, o número escrito na ficha deve ter um número ímpar de divisores.
- generalizando, apenas as fichas marcadas com um número ímpar de divisores são brancas;
- os únicos números que possuem um número ímpar de divisores são quadrados perfeitos;
- ao final das 100 manipulações, as fichas numeradas 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100 permanecem brancas.

Questão 13

Apenas para o Ensino Médio
Cuidado com o lobo! (10 pontos)

A tabela abaixo lista todos os caminhos que vão do ponto A ao ponto B passando pelo ponto L.

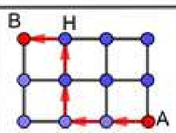
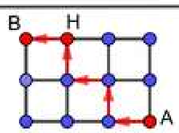
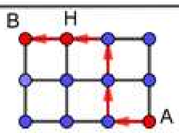
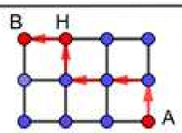
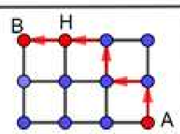
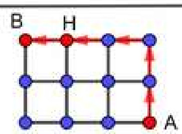
A 2ª linha da tabela dá a probabilidade de Chapeuzinho Vermelho seguir o caminho correspondente.

Rota				
Chance	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$

A probabilidade de Chapeuzinho Vermelho passar pelo ponto L e ser devorado pelo lobo é igual a soma das probabilidades da tabela, ou seja,

ou seja, 31,25%.

A interseção em que o lobo tem maior probabilidade de cruzar com Chapeuzinho Vermelho está indicado na tabela abaixo pelo ponto H.

Rota						
Chance	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{4}$

A maior probabilidade de o lobo encontrar Chapeuzinho Vermelho é ou 68,75% de chance.